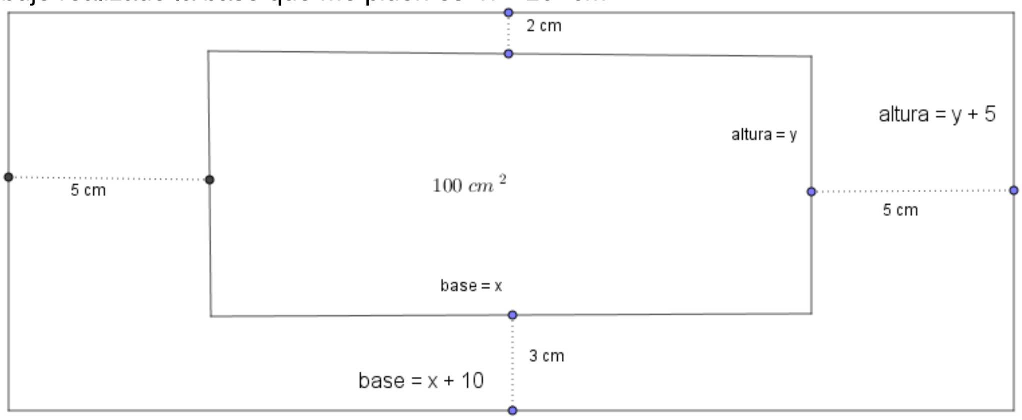
Opción A

Ejercicio 1 opción A, Septiembre 2017 (modelo 6)

[2'5 puntos] Una imprenta recibe el encargo de realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa es de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.
Calcula si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menos cantidad de papel posible.
Si es posible, determina la base "x" para que el perímetro sea mínimo.

Solución

Es un problema de optimización.
Según el dibujo realizado la base que me piden es "x + 10" cm.



Función a maximizar A = (x+10)(y+5)
Relación entre las variables x·y = 100, de donde y = 100/x, tomamos sólo la solución positiva porque es una longitud.
Función a maximizar A(x) = (x + 10)((100/x) + 5) = 100 + 5x +1000/x + 50 = 5x +1000/x + 150.
Si A'(b) = 0 y A''(b) > 0, x = b es un mínimo de A(x)
A'(x) = 5 - 1000/x^2. De A'(x) = 0, tenemos 5 – 1000/x^2 = 0, es decir x^2 = 200, de donde x = ±√(200), y como "x" es una longitud x = +√(200).
Las medidas de la tarjeta son "x + 10" = √(200) + 10 cm ≅ 24'14 cm e "y + 5" = 100/√(200)+5 cm=12'07cm.

Veamos que x = √(200) es un mínimo, viendo que A''(√(200)) > 0
A'(x) = 5 - 1000/x^2 = 5 – 1000·x^{-2}.
A''(x) = 0 – 1000.(-2).x^{-3} = 2000/x^3

Sustituyendo "√(200)" por "x" en A''(x) obtenemos A''(√(200)) = 2000/(√(200))^3 ≅ 0'707 > 0, luego es un mínimo.

La tarjeta tiene de largo 24'14 cm y de ancho 12'07 cm.

Ejercicio 2 opción A, Septiembre 2017 (modelo 6)

[2'5 puntos] Determina la función f : R → R tal que f ''(x) = x·e^x, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremos relativo en x = 1.

Solución

Por el Teorema fundamental del cálculo Integral que dice: Si f(x) es continua en [a,b] entonces la función G(x) = $\int_a^x$ [f(t)]dt es derivable y su derivada es G '(x) = ($\int_a^x$ [f(t)]dt)' = f(x).

En nuestro caso, en la práctica f(x) = ∫ f '(x)dx; f '(x) = ∫ f ''(x)dx; f ''(x) = ∫ f '''(x)dx, etc…

Como la gráfica de f pasa por el origen, punto (0,0), sabemos que *f(0) = 0.*
Como la gráfica de f tiene un extremo relativo en x = 1, sabemos que *f '(1) = 0.*

Recordamos que $f'(x) = \int f''(x)dx = \int x\cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u=x & \Rightarrow du = dx \\ dv=e^x dx & \Rightarrow v=\int e^x dx=e^x \end{array} \right\} = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + K.$ {**}

Empezamos *f '(x) = x·e^x - e^x + K.*
Como f '(1) = 0 → (1)·$e^{(1)}$ – $e^{(1)}$ + K = 0, de donde $e^{(1)}$ – $e^{(1)}$ + K = 0 → K = 0, luego f '(x) = x·e^x - e^x + 0.
Análogamente f(x) = ∫ f '(x)dx = ∫ (x·e^x - e^x)dx = ∫ x·e^x·dx - ∫ e^x·dx = {**} = (x·e^x - e^x) - e^x + L.

Tenemos $f(x) = x\cdot e^x - 2e^x + L$.

Como $f(0) = 0 \rightarrow (0)\cdot e^{(0)} - 2\cdot e^{(0)} + L = 0$, de donde $-2 + L = 0 \rightarrow L = 2$, luego $\mathbf{f(x) = x\cdot e^x - 2e^x + 2}$.

Ejercicio 3 opción A, Septiembre 2017 (modelo 6)

Considera el sistema de ecuaciones AX = B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 2m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}.$$

a) [1'25 puntos] Discute el sistema según los valores de "m".
b) [1'25 puntos] Para "m = 2", calcula, si existe, una solución del sistema anterior para la que "z = 17".

Solución

a)
Discute el sistema según los valores de "m".

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{pmatrix}$.

Por el Teorema de Rouche sabemos que si rango(A) = rango(A*) el sistema es compatible y tiene solución, en caso de rango(A) ≠ rango(A*) el sistema es incompatible y no tiene solución

De $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix}_{F_3 - 3\cdot F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & m-5 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= (-1)\cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & m-5 \end{vmatrix} = 2m - 10 + 6 = 2m - 4$.

De det(A) = 0, tenemos 2m – 4 = 0, de donde m = 2.

Si m ≠ 2, det(A) ≠ 0, con lo cual **rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas,** y **el sistema es compatible determinado teniendo solución única.**

Si m = 2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En A tenemos det(A) = 0, pero como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}_{F_3 - 3\cdot F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas proporcionales, luego, rango(A*) = 2.

Como rango(A) = rango(A) = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado y tiene más de una solución (En R tiene infinitas soluciones).*

b)
Para "m = 2", calcula, si existe, una solución del sistema anterior para la que "z = 17".

Para "m = 2", como el rango es 2 tomamos sólo dos ecuaciones, las dos primeras:

$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \ (F_2 - 2F_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y + z = 1 \end{cases}$, de donde z = 1 + 2y. Tomando $y = b \in R$, tenemos z = 1 + 2b, y entrando en la primera ecuación tenemos x + (b) + (1 + 2b) = 2, de donde x = 1 – 3b, y **las soluciones del sistema son (x,y,z) = (1 – 3b, b, 1 + 2b) con $b \in$ R.**

Nos piden si en este caso hay alguna solución con z = 17.
Tenemos z = 1 + 2b = 17, de donde 2b = 16 y b = 8, luego **sí hay una solución con m = 2 y z = 17, que es (x,y,z) = (1 – 3·(8), (8), 1 + 2·(8)) = (- 23, 8, 17).**

También se puede resolver directamente, sustituyendo z por 17:

Tenemos $\begin{cases} x + y + (17) = 2 \\ 2x + 3(17) = 5 \\ \text{Con } z = 17 \end{cases}$, de 2x + 51 = 5, tenemos 2x = -46, luego x = -46/2 = -23 $\rightarrow$ (-23) + y + 17 = 2,

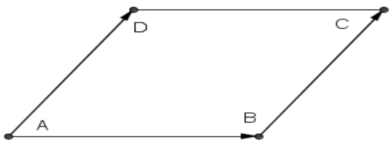
por tanto y = 8, y la solución pedida es **(x,y,z) = (- 23, 8, 17).**

Ejercicio 4 opción A, Septiembre 2017 (modelo 6)

Los puntos A(1,1,1), B (2,2,2) y C(1,3,3) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.
(a) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.
(b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.
(c) [0'5 puntos] Calcula las coordenadas del vértice D.

Solución

Los puntos A(1,1,1), B (2,2,2) y C(1,3,3) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD.
La siguiente figura nos ayudará.



(c)
Calcula las coordenadas del vértice D.

Si A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, sabemos que los vectores **AD** y **BC** son iguales (son equipolentes y tienen las mismas coordenadas).

A(1,1,1), B(2,2,2) y C(1,3,3).

De **AD** = **BC**, tenemos (x - 1, y - 1, z - 1) = (1 - 2, 3 - 2, 3 - 2). Igualando miembro a miembro tenemos:
x – 1 = -1; y – 1 = 1; z - 1 = 1, de donde x = 0, y = 2, z = 2; y **el punto pedido es D(0,2,2)**.

(a)
Calcula el área del paralelogramo.

Sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo (|| ||) del producto vectorial (x) de dos vectores que lo determinan. Podemos tomar los vectores **AD** y **AB**.

AD = (0 - 1,2 - 1,2 - 1) = (-1,1,1); **AB** = (2 - 1,2 - 1,2 - 1) = (1,1,1)

$$\mathbf{AD}\times\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \mathbf{i}(1-1) - \mathbf{j}(-1-1) + \mathbf{k}(-1-1) = (0,2,-2).$$

Área paralelogramo = || **AD**x**AB** || **=** $\sqrt{(0^2 + 2^2 + 2^2)}$ **u^2 =** $\sqrt{(8)}$ **u^2** ≅ **2'8284 u^2**.

(b)
Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Para un plano necesito un punto el A(1,1,1), y dos vectores independientes, el **AD** = (-1,1,1) y el **AB** = (1,1,1)

La ecuación general del plano pedida es det(**AX,AD,AB**) = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{AD},\mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x-1)\cdot(1-1) - (y-1)\cdot(-1-1) + (z-1)\cdot(-1-1) =$$

= 0 + 2y - 2 - 2z + 2 = 0 = **2y - 2z = 0 = y - z = 0**.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Septiembre 2017 (modelo 6)

Considera la función f : R $\rightarrow$ R definida por $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)
(b) [0'5 puntos] Halla la ecuación normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

Solución

Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a)

Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

Me piden la monotonía. Estudio de f '(x)

$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = (1/2)\cdot(e^x + e^{-x})$; $f'(x) = (1/2)\cdot(e^x + e^{-x}\cdot(-1)) = (1/2)\cdot(e^x - e^{-x})$.

De $f'(x) = 0$, tenemos $e^x - e^{-x} = 0$, es decir $e^x = e^{-x}$, luego $x = -x$, de donde $2x = 0$ y la solución es $x = 0$, que será el posible extremo relativo.

Como $f'(-1) = (1/2)\cdot(e^{-1} - e^{-(-1)}) = (1/2)\cdot(1/e - e) < 0$, *f es estrictamente decreciente* ($\searrow$) *en $(-\infty,0)$.*

Como $f'(1) = (1/2)\cdot(e^1 - e^{-1}) = (1/2)\cdot(e - 1/e) > 0$, *f es estrictamente creciente* ($\nearrow$) *en $(0,+\infty)$.*

Por definición $x = 0$ es un mínimo relativo y vale $f(0) = (1/2)\cdot(e^0 + e^0) = (1/2)\cdot(1 + 1) = 1$.

(b)

Halla la ecuación normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

La ecuación de la recta normal en x = 0 es $y - f(0) = [-1/f'(0)]\cdot(x - 0)$. Hemos visto que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, luego la recta normal pedida es $\mathbf{y - 1 = (-1/0)\cdot x}$, multiplicando en cruz $0\cdot(y - 1) = -x$, es decir $\mathbf{x = 0}$. Es decir **es la recta vertical x = 0.**

Ejercicio 2 opción B, Septiembre 2017 (modelo 6)

Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta y = x, la gráfica $y = \dfrac{1}{x^3}$ y la recta x=3.

(a) [0'5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto.

(c) [0'5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \dfrac{1}{x}$ en lugar de $y = \dfrac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

Solución

(a) y (c)

Haz un esbozo del recinto descrito.

Si consideras la gráfica $y = \dfrac{1}{x}$ en lugar de $y = \dfrac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

La gráfica de y = x es la de la recta bisectriz del I y III cuadrante, pasa por (0,0) y (1,1).

La gráfica de $y = \dfrac{1}{x^3}$ no está definida en x = 0 (que es una asíntota vertical). Hay que dibujarla en el I cuadrante solamente.

Vemos que y = x e $y = \dfrac{1}{x^3}$ coinciden en la abscisa x = 1.

Como $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+}\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, la recta x = 0 es una asíntota vertical de la gráfica, y a la derecha del 0, dicha gráfica está en $+\infty$.

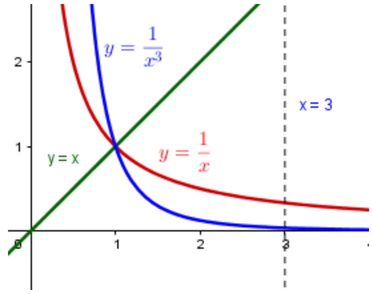
Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right) = \dfrac{1}{\infty^+} = 0^+$, la recta y = 0 es una asíntota horizontal de la gráfica, y la función está por encima de ella en $+\infty$.

Vemos que y = x e $y = \dfrac{1}{x}$ coinciden en la abscisa x = 1.

Como $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, la recta x = 0 es una asíntota vertical dela gráfica, y a la derecha del 0, dicha gráfica está en $+\infty$.

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\infty^+} = 0^+$, la recta y = 0 es una asíntota horizontal de la gráfica, y la función está por encima de ella en $+\infty$.

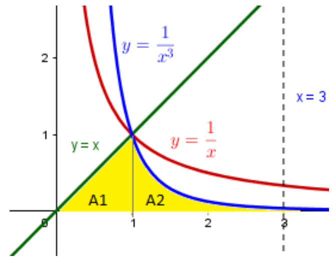
Un esbozo de las tres gráficas es:



Sabemos que en $1 \le x \le 3$, $x < x^3$, por tanto $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^3}$, por tanto el área bajo $\frac{1}{x}$ en [1,3] es mayor que el área bajo $\frac{1}{x^3}$

(b)

Calcula el área del recinto.



Área = A1 + A2 = $\int_0^1 (x)dx + \int_1^3 (1/x^3)dx = [x^2/2]_0^1 + \int_1^3 (x^{-3})dx = (1/2 - 0) + [x^{-3+1}/(-3+1)]_1^3 = (1/2) + [-1/2x^2]_1^3 =$

$= (1/2) + [(-1/2\cdot 3^2) - (-1/2\cdot 1^2)\ u^2 = (1/2) + (1/2) - (1/18)\ u^2 = 1 - 1/18\ u2 =$ **$17/18\ u^2 \cong 0'9444\ u^2$.**

Ejercicio 3 opción B, Septiembre 2017 (modelo 6)

Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'5 puntos] Discute el rango de A según los valores de "k".

(b) [1 punto] Para "k = 1", calcula el determinante de $2(A^tA^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A.

Solución

(a)

Discute el rango de A según los valores de "k".

De $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{vmatrix}_{C_3 - C_2} = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & -k \\ 0 & k+1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= (-1)\cdot(k+1)\cdot\begin{vmatrix} k & k \\ k+1 & -k \end{vmatrix} =$

$= (-1)\cdot(k+1)\cdot(-k^2 - k\cdot(k+1)) = (-1)\cdot(k+1)\cdot(-k)\cdot(k + k+1) = k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)$.

De det(A) = 0, tenemos $k\cdot(k+1)\cdot(2k+1) = 0$, de donde $k = 0$, $k+1 = 0$ y $2k + 1 = 0$, es decir $k = 0$, $k = -1$ y $k = -1/2$.

Si $k \neq 0$, $k \neq -1$ y $k \neq -1/2$, $\det(A) \neq 0$, con lo cual **rango(A) = 3.**

Si **k = 0,** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, como el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2.**

Si **k = -1,** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2.**

Si **k = -1/2,** $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, como el determinante $\begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$ = 1/4–0 ≠ 0, tenemos **rango(A) = 2.**

(b)
Para "k = 1", calcula el determinante de $2(A^tA^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A.
Sabemos que $\det(A^t) = \det(A) = |A|$, $\det(A^{-1}) = |A^{-1}| = 1/|A|$, $\det(A)^m = |A|^m = |A|\cdots$"m veces"$\cdots|A|$, $\det(m\cdot A) =$
$= m^n\cdot\det(A)$, siendo "n" el orden de la matriz A.

Hemos visto antes que para k = 1, existe det(A). lo calculamos:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}_{C_3 - C_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = (-1)\cdot(2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1-2) = 6 = |A^t|.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior resulta:

$\mathbf{det(2\cdot(A^tA^{-1})^{2017}) =} \det(2\cdot(A^tA^{-1})\cdot(A^tA^{-1})^{2016}) = \det((2\cdot A^t)\cdot(A^{-1})\cdot(A^tA^{-1})^{2016}) = 2^3\cdot|A|\cdot(1/|A|)\cdot(\,|A|\cdot(1/|A|)\,)^{2016} =$

$= 8\cdot6\cdot(1/6)\cdot(\,(6\cdot(1/6)\,)^{2016} = 8\cdot1\cdot1^{2016} = 8\cdot1\cdot1$ **= 8.**

Ejercicio 4 opción B, Septiembre 2017 (modelo 6)

Considera el punto P(0,1,1) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$.

(a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a "r".
(b) [1'25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de "r".

Solución

Considera el punto P(0,1,1) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$.

(a)
Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a "r".

Ponemos la recta "r" ≡ $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$ en paramétricas $\begin{cases} x = -5 + 2k \\ y = \qquad k, \text{ con } k \in R \\ z = 2 \end{cases}$

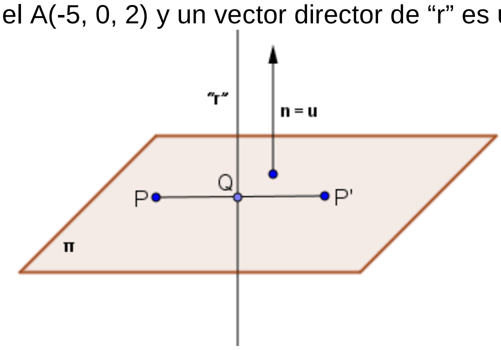
Para un plano necesito un punto, el A (punto de la recta) y dos vectores independientes, el **u** (vector director de la recta) y el **AP**. (También se puede obtener con un punto y un vector normal).

Un punto de "r" es A(-5, 0, 2) y un vector director de "r" es **u** = (2,1,0).
El vector **AP** es **AP** = **p – a** = (0,1,1) - (-5, 0, 2) = (5,1,-1)

La ecuación del plano en forma vectorial es: $\pi \equiv \mathbf{x = a} + \lambda\cdot\mathbf{u} + \mu\cdot\mathbf{AP} =$
= $(x,y,z) = (-5, 0, 2) + \lambda(2,1,0) + \mu(5,1,-1)$, con λ y μ números reales.

(b)
Halla las coordenadas del punto simétrico de P(0,1,1) respecto a "r".

De la recta "r", tomamos el punto el A(-5, 0, 2) y un vector director de "r" es **u** = (2,1,0).



Calculamos el plano "π" perpendicular a la recta "r" por el punto P, el vector normal del plano **n** es el vector director de la recta **u** =(2,1,0).
$\pi \equiv$ **PX•n** = 0 = (x-0,y-1,z-1)•(2,1,0) = 2x + y - 1 = 0, donde • es el producto escalar de dos vectores

Calculamos el punto de corte Q del plano "π" con la recta "r", sustituyendo la recta en el plano:
$2\cdot(-5 + 2k) + (k) - 1 = 0 \rightarrow -10 + 4k + k - 1 = 0 \rightarrow 5k = 11 \rightarrow k = 11/5$.
El punto Q es Q(-5 + 2(11/5), (11/5), 2) = Q(-3/5,11/5,2).

El punto simétrico P'(x,y,z) se calcula sabiendo que el punto Q es el punto medio del segmento PP'.
(-3/5,11/5,2) = ((x+0)/2,(y+1)/2,(z+1)/2), de donde:
$-3/5 = x/2 \rightarrow x = -6/5$.
$11/5 = (y+1)/2 \rightarrow y = 22/5 – 1 = 17/5$.
$2 = (z+1)/2 \rightarrow z = 4 – 1 = 3$.

El simétrico P' de P respecto a la recta "r" es P'(-6/5, 17/5, 3).